Gyakorló feladatok vektoralgebrából

Az alábbi feladatokban, hacsak nem jelezzük másként, az **i**, **j**, **k** bázist használjuk.

1.

a.) Milyen messze vannak egymástól az A(1,2,3) és a B(4,-2,6) pontok?

b.) Számítsa ki az A, B és a C(-3,4,-2) pontok által meghatározott háromszög kerületét, területét, szögeit, C csúcsán áthaladó magasságvektorának koordinátáit!

c.) Írja fel az A, B és a C(-3,4,-2) pontok által meghatározott sík egyenletét ax+by+cz=d formában! A sík tartópontjaként használja az A pontot! Adja meg az imént meghatározott sík és a (2, 3, 2) helyvektor által bezárt szöget!

d.) Bontsa fel az *a* vektort a *b* vektorral párhuzamos és arra merőleges összetevőkre!)

a= (1, 1, 2), *b*=(1, 0, 1). Mekkora e két vektor által kifeszített háromszög területe?

2. Tegyük fel, hogy az $(1,1,-1)^T$, $(-2, 1, 1)^T$, $(1, -3, 1)^T$ vektorok bázist alkotnak. Mik a $(9, 1, -17)^T$ vektor koordinátái e bázisra vonatkoztatva?

3. A szögek kiszámítása nélkül döntse el, hogy az alábbi vektorpárok hegyes-, derék- vagy tompaszöget zárnak-e be. A megadott koordináták az **i**, **j**, **k** bázisra vonatkoznak:

b) (4,-2, 6) és (-3,4,-2);

c) (1,2,3) és (4,-2,6);

d) (1,1,1) és (-10, 7, 3)

4.. Legyen az ABC háromszög három csúcsa: A(2,4,3), B(-3,1,6), C(0,-4,4). Számítsa ki a háromszög X-Y síkra vett merőleges vetületének területét!

Megoldás: A csúcsok helyvektoraiból a háromszög oldalvektorai meghatározhatók, ezekből vektoriális szorzással kapjuk meg a háromszög területét (területvektorát). Ezután az X-Y sík normálvektorának az **n**=(0,0,1) [vagy akár az **n**=(0,0,-1)] vektort véve, az imént meghatározott területvektor és az **n** normálvektor skaláris szorzata (pontosabban ennek abszolút értéke) éppen a kérdéses vetület területét adja.

Tehát a háromszög oldalvektorai $\overline{AB}$ =(-5,-3,3), $\overline{AC}$ =(-2,-8,1), a háromszög területvektora pedig:

t= $\frac{1}{2}(\overline{AB} \times \overline{AC})=\frac{1}{2}(21,-1,34)$. Az X-Y síkra vett merőleges vetület területe: | **t n** |=17.

5.

Legyen az ABC háromszög három csúcsa: A(2,4,3), B(-3,1,6), C(0,-4,4). Számítsa ki a háromszög legnagyobb szögét, és az X-Y síkra vett merőleges vetületének területét!

6. Adottak a következő pontok: $A(1;-2;0), B(2,3,1), C(-1,2,2), D(3,1,4)$.

a.) Írja fel az A ponton átmenő, BCD síkkal párhuzamos sík egyenletét!

b.) Mekkora az a.)-ban kiszámított sík és az $x-2y+z+3=0$ egyenlettel megadott sík által bezárt szög?

7.

Egy Nap körül keringő űrszonda háromszög alakú napelem panelével fedezi energiaszükségletét. A panelt három egymásra merőleges, a háromszög csúcsaiba futó kar tartja, és egy merevítő rúd, amelyik a háromszög közepe táján érintkezik a panellel, és merőleges a felületére. Mind a négy rúd a szonda oldalán, egy pontban van rögzítve. Az egymásra merőleges karok hosszúsága 2m, 2m illetve 3m, s ez utóbbi éppen a Nap irányába mutat. Azoknak a fotonoknak a fluxusa, amelyekre a napelem érzékeny, $1{,}125\cdot 10^{18}\ \frac{1}{m^2 s}$, azaz a Nap irányára merőlegesen $1\ m^2$ felületre másodpercenként $1{,}125\cdot 10^{18}$ db „hasznos" foton érkezik. Ha minden foton két elektront lök ki a napelem félvezetőjének paneljéből, akkor mennyi elektron termelődik egy másodperc alatt? Mekkora szögben esik a napfény a napelem felületére (azaz mekkora a felület normálisa és a Nap iránya által bezárt szög)? Milyen hosszú az a merevítő rúd, amely a háromszög alakú panelre merőleges?

Megoldás:

A csúcspontokba mutató vektorok: $\underline{a}=(3,0,0)$; $\underline{b}=(0,2,0)$; $\underline{c}=(0,0,2)$.
Kiszámítjuk a háromszög területvektorát az oldalvektorok keresztszorzatával:

$$\overline{CA}=\underline{a}-\underline{c}=(3,0,-2);\ \overline{CB}=\underline{b}-\underline{c}=(0,2,-2);\ \underline{t}=\frac{1}{2}\overline{CA}\times\overline{CB}=(2,3,3).$$

A napelem napirányú keresztmetszetét megkapjuk, ha veszünk egy a Nap irányába mutató egységvektort, $\underline{n}=(1,0,0)$, és skalárisan megszorozzuk a területvektorral: $\underline{t}\cdot\underline{n}=2$. Ez tehát $2\ m^2$, azaz egy másodperc alatt $2\cdot 2\cdot 1{,}125\cdot 10^{18}=4{,}5\cdot 10^{18}$ elektron lép ki a lemezből.

A fénysugarak beesési szöge: $\cos\varphi=\frac{\underline{t}\cdot\underline{n}}{|\underline{t}|\cdot|\underline{n}|}=\frac{2}{\sqrt{22}}\approx 0{,}4264$, amiből $\varphi\approx 64{,}76^\circ$.

A $2m$-es tartó rúd illetve a $3m$-es tartó rúd egy háromszöget határoznak meg, amelynek területe $3m^2$. Ez a háromszög képezi alapját annak a gúlának, amelynek élei a tartó rudak illetve a napelem panel élei. Ennek magasságát a másik $2m$-es tartó rúd adja, így a gúla térfogata $2m^3$. A merevítő rúd hossza a merőleges karok és a panel alkotta háromszög alapú gúla magassága, azaz: $m=\frac{3V}{T_{alap}}=\frac{6m^3}{\sqrt{22}m^2}\approx 1{,}28\,m$.

8.

Legyen $V=R^3$ vektortér. Adott három V-beli vektor:

$$\underline{v}_1=\begin{pmatrix}2\\p\\1\end{pmatrix},\qquad \underline{v}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix},\qquad \underline{v}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix},$$

ahol p valós paraméter.

a.) . A p paraméter mely értékére lesznek a v_1, v_2, v_3 vektorok lineárisan összefüggőek? (4 pont)

b.) Az előző feladat alapján p értékét válasszuk úgy, hogy a v_1, v_2, v_3 vektorok bázist alkossanak a V térben. (3 pont)

Megoldás:

1) Lehet például determinánssal számolni.

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ p & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

A lineáris összefüggőséghez az kell, hogy $\det(A) = 0$ legyen. A második sor szerint kifejtve a determinánst: $\det(A) = -p\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 0 + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6p + 1 = 0$ kell.

Innen $p = -\dfrac{1}{6}$.

2) Vagy vegyes szorzattal. A három vektor vegyes szorzata p függvényében: 6p +1. Amikor ennek értéke nulla, a vektorok egy síkban vannak, így összefüggőek.

3) Gauss eliminációval is számolhatunk. Ehhez meg kell keresni, hogy az $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\lambda} = \underline{0}$ egyenletnek milyen p -re vannak nem triviális $\underline{\lambda}$ megoldásai. A jobb oldal mindig 0, ezért nem is érdemes kiírni.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ p & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{3p}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{3p}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -2-\frac{1}{3p} \end{pmatrix}$$

Ahhoz, hogy be kelljen vezetnünk szabad paramétert, vagyis hogy legyen nem triviális megoldás, valamelyik „vezéregyesnek” 0-nak kell lennie. Elképzelhető, hogy $-\frac{3p}{2} = 0$, de ez a második lépésben sorcserével kivédhető lenne. Így az egyetlen lehetőség, hogy $-2 - \frac{1}{3p} = 0$. Ebből $p = -\frac{1}{6}$.

9. Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái: A(-2; -1), B(4; -3), C(4; 5). A B csúcsból induló magasságvonal az AC oldalt a T pontban metszi. Mekkora az AT szakasz hossza?

Megoldás: (ábra)

Jelölés: legyen $\underline{b} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{c} = \overrightarrow{AC}$, $\underline{t} = \overrightarrow{AT}$. Ekkor a $\underline{t}$ vektort megkaphatjuk, mint a $\underline{b}$ vektor $\underline{c}$ vektorra vett vetületét. Ezt az alábbi módon tudjuk kiszámolni:

$\underline{t} = \hat{\underline{c}} \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\alpha$, ahol a $\hat{\underline{c}}$ vektor a $\underline{c}$ irányába mutató egységvektor, α pedig a $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok által bezárt szög. Az egységvektort behelyettesítve, a maradék tényezőket pedig a két vektor skalárszorzatából kifejezve:

$$\underline{t} = \frac{\underline{c}}{|\underline{c}|} \cdot \frac{\underline{b} \cdot \underline{c}}{|\underline{c}|} = \frac{1}{|\underline{c}|^2} \cdot (\underline{b} \cdot \underline{c}) \cdot \underline{c}$$

A vektornak most csak a hosszára van szükségünk:

$$|\underline{t}| = \frac{1}{|\underline{c}|^2} \cdot (\underline{b} \cdot \underline{c}) \cdot |\underline{c}| = \frac{\underline{b} \cdot \underline{c}}{|\underline{c}|}$$

A vektorok koordinátáit kiszámoljuk, majd ezekből a skalárszorzatot, illetve a $\underline{c}$ vektor hosszát:

$\underline{b} = (6; -2)$ $\quad$ $\underline{c} = (6; 6)$ $\quad$ $\underline{b} \cdot \underline{c} = 36 - 12 = 24$ $\quad$ $|\underline{c}| = \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2}$

Ezeket behelyettesítve:

$$|\underline{t}| = \frac{\underline{b} \cdot \underline{c}}{|\underline{c}|} = \frac{24}{6\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

10. a.) Az $\underline{a}(-3; 4)$ és $\underline{b}(1; y)$ vektorok 60°-os szöget zárnak be egymással. Mekkora az *y*?

Megoldás:

A két vektor skalárszorzatát kétféleképpen írjuk fel:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = -3 + 4y$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos(60^\circ) = 5 \cdot \sqrt{1 + y^2} \cdot \frac{1}{2}$$

Így kapunk *y*-ra egy másodfokú egyenletet:

$$-6 + 8y = 5\sqrt{1 + y^2}$$

$$36 - 96y + 64y^2 = 25 + 25y^2$$

$$39y^2 - 96y + 11 = 0$$

Ezt megoldva:

$$y_{1,2} = \frac{96 \pm \sqrt{9216 - 1716}}{78} = \frac{96 \pm 50\sqrt{3}}{78} = \frac{48 \pm 25\sqrt{3}}{39}$$

$$y_1 = 2.34$$

$$y_2 = 0.12$$

A kettő közül azonban csak az első megoldás a jó, mert a másodiknál a két vektor által bezárt szög 120° (a négyzetre emelés miatt, $\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$).

b.) Határozza meg a skalárszorzat felhasználásával a **c** = (2, y_0, z_0) vektort úgy, hogy merőleges legyen az **a** = (2, 3, 0) és a **b** = (1, 2, -2) vektorokra!

11. Mekkora szöget zár be egymással egy kocka két kitérő helyzetű lapátló-egyenese?

Megoldás: (ábra)

Kitérő lapátlók két helyen találhatók.

(1) Két szemközti oldalon. Ekkor a két egyenes által bezárt szög 90°, ez jól látszik.

(2) Két szomszédos oldalon. Ekkor a közös oldalon levő egyik csúcsból kiinduló három oldalvektorát a kockának jelöljük $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$-vel. Ezek közül legyen $\underline{b}$ a közös oldal. A két lapátlót ezek segítségével a következőképpen írhatjuk fel:

$\underline{u} = \underline{a} + \underline{b}$
$\underline{v} = \underline{b} - \underline{c}$
Az általuk bezárt szöget skalárszorzattal számíthatjuk ki:

$$\cos\alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|} = \frac{(\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{b} - \underline{c})}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b} - \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b}^2 - \underline{b} \cdot \underline{c}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$$

A kocka oldalhossza legyen $d = |\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{c}|$, ekkor $|\underline{u}| = |\underline{v}| = d\sqrt{2}$. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok páronként merőlegesek egymásra, így a skalárszorzatuk nulla. Ezeket felhasználva:

$$\cos\alpha = \frac{d^2}{d^2\sqrt{2}^2} = \frac{1}{2},$$

vagyis a két lapátló által bezárt szög $\alpha = 60^\circ$.

12.

a.) Mekkora a térfogata a következő vektorok által meghatározott paralelepipedonnak?
a(2, -5, 3) ^{T}, **b**(3, -2, 1) ^{T}, **c**(1, -3, 5) ^{T}

b.) Határozza meg az $\underline{a}(x; y; 1)^T$ vektor ismeretlen koordinátáit, ha $\underline{a}$ merőleges $\underline{b}(-2;3;0)^T$ vektorra, és az egy csúcsból induló $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}(-2;5;4)^T$ vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata 48 térfogategység!)

Megoldás:

$\underline{a}$ merőleges $\underline{b}$: $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 = -2x + 3y$

paralelepipedon térfogata: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 12x + 8y - 4 = 48$, ahonnan $3x + 2y = 13$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = 3$ $\quad$ $y = 2$

13.
Felírható-e a b vektor az a_1, a_2, a_3 vektorok lineáris kombinációjaként?
$b(0,0,0)^T$,
$a_1(2,3,1)^T$,
$a_2(-1,2,-4)^T$,
$a_3(3,1,5)^T$.

14. Egy tetraéder csúcspontjai *A(2,3,1)*, *B(4,1,-2)*, *C(6,3,7)*, *D(-5,-4,-8)*. Számítsa ki a tetraéder D csúcsából húzható magasságnak a hosszát!

15. Adottak az $A(-2,\ 2,\ -2)$, $B(-3,\ 2,\ 5)$, $C(2,\ -2,\ 2)$, $D(9,\ -6,\ -15)$ pontok. Számítsa ki az AB és AD vektorokat! Számítsa ki az ABD_Δ területét vektoralgebrai úton! Döntse el, egy síkban vannak-e a megadott pontok? Adja meg a B csúcsba mutató magasság vektorát.