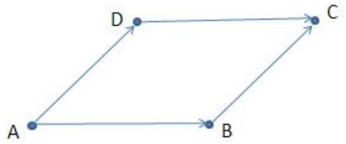
2. Vektoralgebra

1. Adott egy paralelogramma három csúcsa.

$$A=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$$



a, Határozza meg a negyedik pont koordinátáit
b, Határozza meg a paralelogramma kerületét!
c, Adja meg a paralelogramma szögeit!
d, Határozza meg az ABC háromszög C csúcsához tartozó magasság vektorát!
e, Határozza meg a paralelogramma területét

Megoldás

a, Két oldalvektora: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\5\\2\end{pmatrix}$

C pont koordinátái: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\5\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$

b, Legyen a két oldalvektor: $\underline{a}=\overline{AB}=\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}$ és $\underline{b}=\overline{AD}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

A vektorok hossza: $|\underline{a}|=\sqrt{(-3)^2+4^2+0^2}=5$ $|\underline{b}|=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$

Tehát a kerület: $K=10+2\sqrt{6}$

c, $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok skalárszorzata: $\underline{a}\cdot\underline{b}=(-3)\cdot 1+4\cdot 1+0\cdot 2=1$

$\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok szöge: $\cos\alpha=\frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|}=\frac{1}{5\sqrt{6}}$ → $\alpha=85{,}3^\circ$

d, $\underline{a}$ -val párhuzamos egységvektor: $\underline{e}_a=\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}=\begin{pmatrix}-3/5\\4/5\\0\end{pmatrix}$

A $\underline{b}$ vektor $\underline{a}$ vektorral párhuzamos komponense:

$$\underline{a}_{\shortparallel}=(\underline{b}\cdot\underline{e}_a)\cdot\underline{e}_a=(1\cdot\frac{-3}{5}+1\cdot\frac{4}{5}+2\cdot 0)\cdot\underline{e}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-3/5\\4/5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3/25\\4/25\\0\end{pmatrix}$$

Megjegyzés: A párhuzamos komponens képletének egy másik lehetséges felírása:

$$\underline{a}_{\shortparallel}=(\underline{b}\cdot\underline{e}_a)\cdot\underline{e}_a=\left(\underline{b}\cdot\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}\right)\cdot\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}=\frac{(\underline{b}\cdot\underline{a})\cdot\underline{a}}{|\underline{a}|^2}$$

A keresett magasságvektor megegyezik a $\underline{b}$ vektor $\underline{a}$ vektorra merőleges komponensével:

$$\underline{m}=\underline{b}_{\perp}=\underline{b}-\underline{b}_{\shortparallel}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3/25\\4/25\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28/25\\21/25\\2\end{pmatrix}$$

e, Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok vektoriális szorzata:

$$\underline{a}\times\underline{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=i(4\cdot 2-0\cdot 1)-j((-3)\cdot 2-0\cdot 1)+k((-3)\cdot 1-4\cdot 1)=8i+6j-7k=\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$$

A vektoriális szorzat hossza megadja a paralelogramma területét:

$$T_{paralelogramma}=|\underline{a}\times\underline{b}|=\sqrt{8^2+6^2+(-7)^2}=\sqrt{149}$$

(Emlékeztető: $T_{háromszög}=\dfrac{T_{paralelogramma}}{2}=\dfrac{|\underline{a}\times\underline{b}|}{2}$)

2. Adott két vektor, $\underline{a}=\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ és $\underline{b}=\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, illetve a tér egy pontja, $A=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a, Írja fel a pont és a két vektor által meghatározott sík egyenletét!

b, Legyen $P=\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ a tér egy másik pontja. Rajta van-e az előző feladatban meghatározott síkon?

c, Megadunk egy harmadik vektort, $\underline{c}=\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$-t. Mennyi az $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata? Az indokláshoz használja a vektoralgebrában tanult ismereteket!

Megoldás

a, A két vektor vektoriális szorzata merőleges mindkét vektorra, ezért merőleges a síkra is, így ez lesz a sík normálvektora: $\underline{n}=\underline{a}\times\underline{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 1 & -2 \\ 9 & 3 & -4 \end{vmatrix}=2i+6j+9k=\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

A sík egyenletének képlete Ax+By+Cz = Ax$_0$+By$_0$+Cz$_0$ ahol $\underline{n}=\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ a normál vektor és $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ a sík egy tetszőleges pontja. → a SÍK EGYENLETE: $2x+6y+9z=8$

b, $2\cdot 0+6\cdot(-5)+9\cdot 3=-3\neq 8$ P nincs rajta a síkon, mert nem teljesíti az egyenletet.

c, A paralelepipedon térfogata a három vektor vegyes szorzatával egyezik meg:

$$V_{paralelepipedon}=(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c}=(2\quad 6\quad 9)\cdot(5\quad 8\quad 7)=121$$

(Emlékeztető: $V_{tetraéder}=\dfrac{V_{paralelepipedon}}{6}=\dfrac{(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c}}{6}$)

3. Számítsa ki a 2x+y+3z=2 és a 4x-y+z=-3 egyenletű síkok által bezárt (kisebbik) szöget!

Megoldás:

A két sík által bezárt szög megegyezik a normálvektoraik által bezárt szöggel. A normálvektorok koordinátái pedig az egyenletekből leolvashatóak.

A két normálvektor: n1=(2,1,3), n2=(4,-1,1)

A normálvektorok hossza: |n1|=gyök(14), |n2|=gyök(18)

A bezárt szög: cos alfa=(8-1+3)/gyök(14)gyök(18)=0,63 alfa=50,95

4. Számítsa ki a $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ pont és a 2x-6y+3z=5 egyenletű sík távolságát!

Megoldás

Megkeressük a sík egy tetszőleges pontját, ami kielégíti az egyenletet, legyen ez a pont: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

A P pont síktól vett távolságát megkapjuk, ha az A pontból a P-be mutató vektor merőleges vetületét vesszük a sík normálvektorára.

$\overline{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\underline{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ Normálvektorral párhuzamos egységvektor: $\underline{e}_n = \frac{\underline{n}}{|\underline{n}|} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 6/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}$

$(|\underline{n}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = 7)$

$\overline{AP}$ merőleges vetülete a normálvektorra: $\overline{AP} \cdot \underline{e}_n = (2 + 6 - 12)/7 = -4/7$

Azért lett negatív, mert a síknak nem azonos oldalán volt a pont és a normálvektor.

A P pont távolsága a síktól: 4/7

5. Adottak a térben az alábbi pontok:

A[1;2;3], B[1;0;-1], C[2;4;-2], D[-2;4;3]

a) Lássa be, hogy a 4 pont nincs egy síkban!

b) Számítsa ki a pontok által meghatározott tetraéder térfogatát!

c) Adja meg a tetraéder D ponthoz tartozó magasságát!

d) Adja meg a tetraéder D ponthoz tartozó magasságvektorát!

Megoldás

a) és b) Az A,B és C és D pontok meghatároznak három vektort:

$$\underline{a} = \overline{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{b} = \overline{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{c} = \overline{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vegyes szorzatuk és abból a térfogat:

$$V_{paralelepipedon} = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (18 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0) = -46$$

$$V_{tetraéder} = \frac{V_{paralelepipedon}}{6} = \frac{(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}}{6} = \frac{-46}{6}$$

Vegyes szorzatuk, azaz az általuk kifeszített paralelepipedon térfogata nem nulla, ezért nem lehetnek egy síkban.

c) A tetraéder magasságát kétféle módon is számolhatjuk:

(1) $m = \dfrac{V_{tetraéder}}{T_{alapháromszög}} = \dfrac{V_{paralelepipedon}}{T_{alapparalelogramma}} = \dfrac{(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}}{|\underline{a} \times \underline{b}|} = \dfrac{-46}{\sqrt{18^2 + 4^2 + 2^2}} = \dfrac{-46}{\sqrt{344}}$

(2) A tetraéder magassága = a D csúcs távolsága az ABC síktól (pont és sík távolsága)

$$m = \overline{AD} \cdot \underline{e}_n = \underline{c} \cdot \underline{e}_n = \underline{c} \cdot \frac{\underline{n}}{|\underline{n}|} = \underline{c} \cdot \frac{\underline{a} \times \underline{b}}{|\underline{a} \times \underline{b}|} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18/\sqrt{344} \\ 4/\sqrt{344} \\ 2/\sqrt{344} \end{pmatrix} =$$

$$= \left((-3) \cdot \frac{18}{\sqrt{344}} + 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{344}} + 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{344}} \right) = \frac{-46}{\sqrt{344}}$$

d) A tetraéder magasságvektora merőleges az alaplap síkjára, ezért párhuzamos a sík normálvektorával, a hossza pedig a c) feladatban kiszámolt m, ezért a magasságvektor = m * normálvektor irányú egységvektor:

$$\underline{m} = m \cdot \underline{e}_n = \frac{-46}{\sqrt{344}} \cdot \begin{pmatrix} 18/\sqrt{344} \\ 4/\sqrt{344} \\ 2/\sqrt{344} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -828/344 \\ -184/344 \\ -92/344 \end{pmatrix}$$

7. A matematikusok pikniket szerveznek, és elhatározzák, hogy erre az alkalomra sütnek egy szép nagy paralellepipedon alakú tortát. Sajnos azonban nem tudják, hogy pontosan mennyi massza szükséges a tésztához, ezt még ki kell számolni. Azt tudjuk, hogy az alaplap hosszabbik oldala 4 dm, szélessége 2 dm, és az oldalak 45 fokos szöget zárnak be. A harmadik oldal és a hosszabbik alapél által meghatározott sík merőleges az alaplap síkjára. A harmadik oldal hossza $\sqrt{2}$, és a végpontjából a hosszabbik oldalra állított merőleges az oldalt közös pontjuktól 1 dm távolságra metszi. Számítsuk ki a szükséges tészta térfogatát!

Megoldás: A paralelepipedont meghatározó három vektor: a = (4,0,0) b = (2,0,-2) c = (1,1,0)
Atérfogat vegyes szorzat alapján: V = 8 dm^3

9. Legyenek adottak az alábbi pontok Tekintsük az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok által kifeszített paralelogrammát, melynek negyedik csúcsát jelölje C!

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

a) Számítsa ki a paralelogramma kerületét!
b) Határozza meg az ABD háromszög D csúcsához tartozó magasság vektorát!

Megoldás:

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}, C = \underline{b} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$

$K = 2\left|\overrightarrow{AB}\right| + 2\left|\overrightarrow{AD}\right| = 2\sqrt{9+9+9} + 2\sqrt{9+16+121} = 34{,}39$

b) $\overrightarrow{AM} = \frac{(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2} = \frac{-9+12+33}{27}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix}-7\\0\\5\end{pmatrix}$

11. Egy olyan tetraéder alakú prizmát szeretnénk gyártani üvegből, melynek csúcsai az alábbi pontokba kell illeszkednek.

$$A = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}2\\-1\\-6\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix}-2\\-3\\2\end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$$

a) Ahhoz, hogy a prizmát készítő gép pontosan tudjon vágni, meg kell adnunk az oldallapok síkjainak egyenleteit. Az ABC oldallap kivételével minden oldal síkjának egyenlete ismert. Határozza meg a hiányzó oldallap síkjának egyenletét!
b) Szeretnénk tudni, hogy a prizma oldalait megvilágítva mekkora szögű fénytörés fog bekövetkezni. Ehhez ismerni kell az oldallapok által bezárt szögeket. Határozza meg az ABC és az ACD oldallapok síkjai által bezárt szöget!
c) Szeretnénk meghatározni a prizma várható súlyát még az elkészítés előtt. Mivel ismert az alkalmazott üveg sűrűsége, ehhez elég meghatároznunk a prizma térfogatot. Mekkora ez a térfogat?
d) Szeretnénk tudni, hogy milyen magas a prizma, ha az ABC oldallapjára állítjuk. Határozza meg ezt a magasságot!
Megoldás:

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\-3\\-9\end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-3\\-5\\-1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-42\\28\\-14\end{pmatrix} \rightarrow \underline{n}_{ABC} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} \rightarrow 3x - 2y + z = 3\cdot 1 - 2\cdot 2 + 1\cdot 3 = 2$$

b) $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}7\\-2\\-11\end{pmatrix} = \underline{n}_{ACD}$

$$cos\varphi = \frac{\underline{n}_{ABC}\cdot\underline{n}_{ACD}}{|\underline{n}_{ABC}|\cdot|\underline{n}_{ACD}|} = \frac{14}{\sqrt{14}\sqrt{164}} = 0{,}2922 \rightarrow \varphi = 73{,}01°$$

c) $V = \frac{1}{6}\cdot|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}| = \frac{112}{6} = \frac{56}{3}$

d) $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$$m = \frac{(\overrightarrow{AD}\cdot\underline{n})}{|\underline{n}|} = \frac{|-3-4+1|}{\sqrt{1+4+1}} = \sqrt{6}$$