Speciális mátrixok

1. Milyen speciális mátrixok az alábbiak?

Mi jellemző az ilyen speciális mátrixok sajátértékeire? Ellenőrizze állítását a sajátértékek kiszámolásával! (Gyakorlásképpen számítsa ki a valós sajátértékhez tartozó sajátvektorokat!)

a, $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ b, $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

c, $\begin{bmatrix} 0 & 9 & -12 \\ -9 & 0 & 20 \\ 12 & -20 & 0 \end{bmatrix}$ d, $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Megoldás:

a, Szimmetrikus mátrix - Szimmetrikus mátrixok sajátértékei valósak:

A transzformáció sajátértékei a $\det([\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}]_a)$ polinom gyökei.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 5-\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)\left[(5-\lambda)(2-\lambda)-4\right] + (-4)\left[4(2-\lambda)-4\right] + 2(8-2(5-\lambda)) =$$

$$= (5-\lambda)\left[6-7\lambda+\lambda^2\right] + (-4)(4-4\lambda) + 2(-2+2\lambda) = (5-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-6) - 16(1-\lambda) + 4(\lambda-1) =$$

$$= (\lambda-1)\left[(5-\lambda)(\lambda-6)+20\right] = (\lambda-1)(-\lambda^2+11\lambda-10) = (\lambda-1)(\lambda-1)(10-\lambda)$$

$$(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 10$$

Számítsuk ki a $\lambda_{1,2}$=1 sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] -I \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right](-2)II \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = -2x_1 - 2x_2 \end{array}$$

$$sv_{1,2} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ -2p-2q \end{bmatrix}, p, q \in \mathrm{R}\backslash\{0\}, \text{ tehát például a } \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix} \text{ vektor } \lambda_{1,2}\text{=1-hez tartozó}$$

sajátvektor. Ez a sajátaltér két dimenziós.

Számítsuk ki a λ_3=10 sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -8 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -II \\ +4III \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 4 & 2 & 0 \\ 9 & -9 & 0 & 0 \\ -18 & 18 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ +2II \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 4 & 2 & 0 \\ 9 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] /9 \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] +5II \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & \\ 1 & -1 & 0 & \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} -x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{array} \rightarrow x_1 = x_2 = 2x_3$$

$$sv_3 = \begin{bmatrix} r \\ r \\ r/2 \end{bmatrix}, r \in \mathrm{R}\backslash\{0\}, \text{ tehát például a } \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ vektor } \lambda_3\text{=10-hez tartozó sajátvektor. Ez a}$$

sajátaltér egy dimenziós.

b, Szimmetrikus mátrix - Szimmetrikus mátrixok sajátértékei valósak:

$$\lambda_1 = 0, sv_1 = \begin{bmatrix} -p \\ p \\ p/2 \end{bmatrix}, p \in \mathbf{R}\backslash\{0\}, \text{ 1 dimenziós sajátaltér}$$

$$\lambda_2 = 3, sv_2 = \begin{bmatrix} -p/2 \\ -p \\ p \end{bmatrix}, p \in \mathbf{R}\backslash\{0\}, \text{ 1 dimenziós sajátaltér}$$

$$\lambda_3 = 6, sv_3 = \begin{bmatrix} -p \\ -p/2 \\ p \end{bmatrix}, p \in \mathbf{R}\backslash\{0\}, \text{ 1 dimenziós sajátaltér}$$

c, Ferdén szimmetrikus mátrix - Ferdén szimmetrikus mátrikox sajátértékei tisztán képzetesek:
Karakterisztikus egyenlet. $-\lambda(\lambda^2+625) = 0$, Sajátértékek valóban képzetesek: 0, 25i, -25i.

A 0-hoz tartozó sajátaltér$=\left\{\begin{bmatrix} 20z \\ 12z \\ z \end{bmatrix} z \in R\right\}$

d, Ortogonális mátrix - Ortogonális mátrixok abszolút értéke 1 (Lehetnek komplexek is!)

Karakterisztikus egyenlet: $(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda+1) = 0$

A sajátértékek valóban egy abszolút értékűek: $1,\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i),\ \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)$

Az 1-hez tartozó sajátvektorok $=\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} z \in R\right\}$

2. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2i & 2-2i \\ -2-2i & 0 \end{pmatrix}$

a, Milyen speciális mátrix az $\underline{\underline{A}}$?

b, Fogalmazza meg az ilyen speciális mátrixok sajátértékeire vonatkozó állítást, majd ellenőrizze azt az $\underline{\underline{A}}$ mátrix esetén!

M.o.: a, Ferdén hermitikus, mert:

$$\overline{\underline{\underline{A}}} = \begin{pmatrix} -2i & 2+2i \\ -2+2i & 0 \end{pmatrix} \to \overline{\underline{\underline{A}}}^T = \begin{pmatrix} -2i & -2+2i \\ 2+2i & 0 \end{pmatrix} \to -\overline{\underline{\underline{A}}}^T = \begin{pmatrix} 2i & 2-2i \\ -2-2i & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}}$$

b, Ferdénhermitikus mátrix sajátértékei tisztán képzetesek.

$$\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 2i-\lambda & 2-2i \\ -2-2i & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}}\right)=(2i-\lambda)(-\lambda)-(2-2i)(-2-2i)=\lambda^2-2i\lambda+8=0$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2i+\sqrt{(2i)^2-4\cdot 8}}{2}=\frac{2i+\sqrt{-36}}{2}=\frac{2i\pm 6i}{2}$$

Tehát a két sajátérték valóban tisztán képzetes: $\lambda_1=4i, \lambda_2=-2i$

3. $\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix} 4 & 1-3i \\ 1+3i & 7 \end{bmatrix}$

a, Milyen speciális mátrix az $\underline{\underline{A}}$?

b, Fogalmazza meg az ilyen speciális mátrixok sajátértékeire vonatkozó állítást, majd ellenőrizze azt az $\underline{\underline{A}}$ mátrix esetén!

M.o.: a, Hermitikus, mert $\overline{\underline{\underline{A}}}^T=\underline{\underline{A}}$

b, Hermitikus mátrixok sajátértékei valósak, ez most teljesül, mert A sajátértékei: $\lambda_1=9, \lambda_2=2$

4. $\underline{\underline{A}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & i \end{bmatrix}$

a, Milyen speciális mátrix az $\underline{\underline{A}}$?

b, Fogalmazza meg az ilyen speciális mátrixok sajátértékeire vonatkozó állítást, majd ellenőrizze azt az $\underline{\underline{A}}$ mátrix esetén!

M.o.:

a, Unitér, mert $\underline{\underline{A}}\cdot\overline{\underline{\underline{A}}}^T=\underline{\underline{E}}$

b, Unitér mátrixok sajátértékeinek abszolút értéke 1. A most megadott A mátrix sajátértékei:

$$\lambda_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}, \lambda_2=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$$

Komplex szám abszolút értéke: $|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}$. Tehát igaz az állítás, mert:

$$|\lambda_1|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1, és \ |\lambda_2|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$$

5. Milyen speciális mátrixok az alábbiak? Fogalmazza meg az ilyen speciális mátrixok sajátértékeire vonatkozó állítást, majd ellenőrizze azt az adott mátrixok esetén!

a, $\begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 2i \end{bmatrix}$

b, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

c, $\begin{bmatrix} -4i & 1+4i \\ 1+4i & 0 \end{bmatrix}$

d, $\begin{bmatrix} -3i & 2+i \\ -2+i & i \end{bmatrix}$

e, $\begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

f, $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$

g, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ h, $\begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix}$

Megoldás:

a, ferdén hermitikuss.é.képzetes: 2i ,2i
b, antiszimmetrikus és ortogonális is, sé. képzetesek és az abszolút értékük 1: i,-i
c, hermitikus,sé. valós:1,-5
d, ferdén hermitikus, sé. képzetes: -4i, +2i
e, szimmetrikus, sé. valós: 3,3,-6i
f, unitér, sé. abszolút értéke 1: $i, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$
g, ortogonális, sé. abszolút értéke 1: $-1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$
h, unitér, sé. abszolút értéke 1: 1,i

6.a) Párosítsa össze a mátrixokat a rájuk jellemző speciális tulajdonsággal, indokolja is állítását:

$$A = \begin{bmatrix} 2i & 1+i \\ -1+i & 3i \end{bmatrix}$$ unitér

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$$ ferdénhermitikus

$$\mathrm{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}$$ hermitikus

b) Mit tudunk mondani az unitér, a ferdén hermitikus, és a hermitikus mátrixok sajátértékeiről általában?

c) Számolja ki az a) részben megadott három mátrix sajátértékeit, és ellenőrizze a b) részben megfogalmazott állítást!

Megoldás:
első – ferdén hermitikus – sé.: i,4i
második – hermitikus – sé. : 1,4
harmadik - unitér – sé.: $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$