Sajátérték, sajátvektor

Emlékeztető „MESE” (A sajátérték, sajátvektor pontos definíciója a könyvben!!!):
Leképezés sajátvektora olyan nem nulla vektor, amelynek képe (a hozzárendelt vektor) párhuzamos az eredeti vektorral. Ebben az esetben a képvektor λ-szorosa az eredeti vektornak, ez aλ érték a leképezés adott sajátvektorhoz tartozó sajátértéke.

1.1 Az alábbi transzformációknak határozzuk meg a sajátértékeit és sajátvektorait, a leképezésmátrixának kiszámítása nélkül „józan paraszti ésszel”!

a) Síkbeli tükrözés az origóra.
b) Térbeli tükrözés az origóra.
c) Síkbeli tükrözés az x tengelyre
d) Térbeli 180^o-os forgatás a z tengely körül
e) Síkbeli vektorok vetítése origón átmenő tengelyre.
f) Térbeli vektorok vetítése az *x* tengelyre; az *xy* síkra; az *xz* síkra.

Megoldások
a) SV minden vektor -1 SÉ-kel;
b) Ugyanúgy, mint előbb.
c) SV-ok az y tengely vektorai -1 SÉ-kel, és az x tengely vektorai 1 SÉ-kel
d) SV-ok a z tengely vektorai 1 SÉ-kel, és az xy sík vektorai -1 SÉ-kel
e) A tengelyre eső vektorok a SV-ok 1 SÉ-kel. A tengelyre merőlegesek is SV-ok 0 SÉ-kel.
f) *x* tengelyre: a tengelybe eső vektorok SV-ok 1 SÉ-kel, az *yz* síkba esők pedig 0 SÉ-kel;
xy síkra: a síkba eső vektorok SV-ok 1 SÉ-kel, a *z* tengely irányúak pedig 0 SÉ-kel;
xz síkra: hasonlóan, mint előbb.

1.2 Határozza meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -6 & -8 & 4 \\ -6 & -9 & 5 \end{bmatrix}$

a) SÉ: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2;\ 2$ SV: $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix}, p \in R\backslash\{0\}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} r \\ 3r \end{bmatrix}, r \in R\backslash\{0\}$

b) SÉ: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5;\ 5$ SV: $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -p \\ p \end{bmatrix}, p \in R\backslash\{0\}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} r \\ 3r \end{bmatrix}, r \in R\backslash\{0\}$

c) SÉ: $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 2\ \ 2$
SV: $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} p \\ 3p \\ 3p \end{bmatrix}, p \in R\backslash\{0\}, \underline{v}_{2,3} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ -2q \end{bmatrix},\ p, q \in R$ és p és q nem lehetnek egyszerre nullák!

g) SÉ: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$= 3

SV: $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -p \\ 0 \\ p \end{bmatrix}, p \in R\backslash\{0\}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} q \\ q \\ q \end{bmatrix}, q \in R\backslash\{0\}, \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} -r \\ r \\ r \end{bmatrix}, r \in R\backslash\{0\}$

h) $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$= 2

SV: $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -p \\ 3p \\ 3p \end{bmatrix}, p \in R\backslash\{0\}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -q \\ 2q \\ 3q \end{bmatrix}, q \in R\backslash\{0\}, \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} -r \\ r \\ r \end{bmatrix}, r \in R\backslash\{0\}$

1.3 a, Adja meg az alábbi mátrix sajátértékeit, illetve a legkisebb abszolút értékűsajátértékéhez tartozó sajátvektorokat!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

b, Ellenőrizze egy kiválasztott sajátvektor esetén, hogy tényleg teljesül rá a sajátérték-egyenlet.
c, A karakterisztikus egyenlet megoldása alapján, tehát további számolás nélkül, adja meg az A mátrix determinánsának értékét!

Megoldás:
a, Sajátértékek: 0, -1, -3 0-hoz tart sajátvektorok: (4, -1, 1) vektor és többszörösei

b, $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{v} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \underline{v}$

c, detA = 0 mert van 0 sajátérték

1.4 a, Adja meg az alábbi mátrix sajátértékeit, illetve a legkisebb abszolút értékűsajátértékéhez tartozó sajátvektorokat!

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

b, Ellenőrizze egy kiválasztott sajátvektor esetén, hogy tényleg teljesül rá a sajátérték-egyenlet.

Megoldás:
a, Sajátértékek: -3, 1, 5
1-hez tart sajátvektorok: (-1, -1, 1) vektor és többszörösei