Lineáris leképezések

1.1 Mely leképezések homogén lineárisak? Legyen $x, y \in R$

a, A = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

b, B = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

c, C = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x+y \\ 3y \end{pmatrix}$

d, D = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

e, E = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}$

f, F = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1/x \\ 1/y \end{pmatrix}$

g, G = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

h, H = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$

i, I = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y+1 \\ 0 \end{pmatrix}$

j, J = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

k, K = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

l, L = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -y \\ 5x \\ 2y-x \end{pmatrix}$

Megoldás:

a. Igen, mert

$$A\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda y \\ \lambda x \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \cdot A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

b. Igen

c. Igen

d. Igen

e. Nem, mert $E\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = E\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x \lambda y \end{pmatrix} = \lambda^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} \neq \lambda \cdot E\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

f. Nem

g. Igen

h. Nem

i. Nem

j. Nem

k. Igen

l. Igen

1.3 Homogén lineárisak-e a következő leképezések?

a) Minden 3x3-as valós mátrixhoz hozzárendeljük a determinánsát.
b) Minden 3x3-as valós mátrixhoz hozzárendeljük az első sorának első elemét.
c) minden térbeli vektort tükrözünk egy origón átmenő síkra.
g) Minden térbeli vektorhoz hozzárendeljük egy **adott** tengely körüli α szöggel történő elforgatottját.
h) Minden térbeli vektorhoz hozzárendeljük egy origón áthaladó síkra vett vetületét.

Megoldások

Minden esetben a két tulajdonságot kell ellenőrizni:

i) $L(u+v)=L(u)+L(v)$

ii) $L(\alpha \cdot u)=\alpha \cdot L(u)$,

ahol u és v tetszőleges vektorok a vektortérből , α pedig egy valós szám.

a) Igaz-e az, hogy det(A+B)=det(A)+det(B) ? Nem. Hiszen pl. a nullmátrixot előállíthatjuk két nem nulla mátrix összegeként, amelyeknek determinánsa külön-külön nem nulla, de a nullmátrixszé nyilván az. Vagyis ez a leképezés nem lineáris. A másik tulajdonságot már ellenőrizni sem kell (de az sem igaz [hanem mi igaz helyette?]).

b) Igen,

c) Igen

g) Igen,

h) Igen,

1.3(Nehezebb feladat) Melyek homogén lineárisak és melyek nem a következő leképezések közül?

Legyen $\underline{a} \in R^n$ rögzített, és tetszőleges $\underline{b} \in R^n$ esetén a leképezés:

a. A: $\underline{b} \to \underline{a} \cdot \underline{b}$ Megoldás: Igen, mert $A(\lambda \underline{b}) = \underline{a} \cdot (\lambda \underline{b}) = \lambda(\underline{a} \cdot \underline{b}) = \lambda A(\underline{b})$

$$A(\underline{b}+\underline{c}) = \underline{a} \cdot (\underline{b}+\underline{c}) = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c} = A(\underline{b}) + A(\underline{c})$$

b. B: $\underline{b} \to \underline{a} \times \underline{b}$ M.o.: Igen

c. C: $\underline{b} \to \underline{a} + \underline{b}$ M.o.: Nem

d. D: $\underline{b} \to |\underline{a}| \cdot \underline{b}$ M.o.: Igen

e. E: $\underline{b} \to |\underline{b}| \cdot \underline{b}$ M.o.: Nem

f. F: $\underline{b} \to \underline{b} \cdot \underline{b}$ M.o.: Nem

g. G: $\underline{b} \to \underline{b} \times \underline{b}$ M.o.: Nem

1.4(Nehezebb feladat)Legyen V a legfeljebb harmadfokú, valós együtthatós polinomok vektortere.Ellenőrizze, hogy az alábbiak homogén lineáris leképezések!

a) $f(x) \to f'(x)$, (ahol az f(x) az általános polinom a V térben)

b) $f(x) \to x \cdot f'(x)$, (ahol az f(x) az általános polinom a V térben)

c) $f(x) \to \int_0^1 f(x)dx$, (ahol az f(x) az általános polinom a V térben)

Leképezések mátrixa

Egy A: V → W homogén lineáris leképezés mátrixának j-edik oszlopa a V vektortér j-edik bázisvektorához rendelt képvektor koordinátáit tartalmazza a W vektortér megadott bázisában:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A(\underline{s}_1)_{[T]} & A(\underline{s}_2)_{[T]} & A(\underline{s}_3)_{[T]} & \ldots\ldots\ldots & A(\underline{s}_n)_{[T]} \end{bmatrix} \text{ahol} \begin{array}{l} S = \{\underline{s}_1, \underline{s}_2, \ldots\ldots \underline{s}_n\} \; a \; V \; bázisa \\ T = \{\underline{t}_1, \underline{t}_2, \ldots\ldots \underline{t}_m\} \; a \; W \; bázisa \end{array}$$

Ha V vektortér n dimenziós, a W vektortér pedig m dimenziós. Akkor a leképezés mátrixa m×n-es!

2. Adja meg az 1.1 feladatban meghatározott homogén lineáris leképezések mátrixát a kanonikus bázispárban!

Megoldás:

a, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **b,** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ c, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ d, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

g, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ k, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ l, $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

3. Határozzuk meg a következő lineáris leképezések mátrixát (a kanonikus bázisban)!

a) Síkbeli tükrözés az origóra.
b) Térbeli tükrözés az origóra.
c) Térbeli tükrözés az *xy* síkra.
d) Síkbeli vektorok vetítése az *x* (illetve *y*) tengelyre.
e) Térbeli vektorok vetítése az *x* tengelyre; az *xy* síkra; az *xz* síkra.
f) Térbeli vektorok forgatása a *z* tengely körül α szöggel.
g) Térbeli vektorok forgatása az *y* tengely körül α szöggel.

Megoldások

a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

d) *x* tengelyre: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, *y* tengelyre: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) *x* tengelyre: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; *xy* síkra: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; *xz* síkra: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \end{bmatrix}$