Komplex számok gyakoló feladatok

1. **Számítsd ki algebrai alakban és az eredményt ábrázold koordináta-rendszerben:**
   - **a)** Ha z=2+4i és w=2-i, akkor mennyi $z \cdot w$; $\frac{z}{w}$; $\frac{1}{z}$; $i \cdot w$; z^2; $-3 \cdot w$.
   - **b)** Ha z=1-3i és w=2+2i, akkor mennyi $z \cdot w$; $\frac{z}{w}$; $\frac{1}{z}$; $i \cdot w$; z^2; $-3 \cdot w$.

2. **Számítsd ki az alábbi komplex számok hosszát és argumentumát:**
   - **a)** z=2-i
   - **b)** z=3+i
   - **c)** $z=1-i\sqrt{2}$

3. **Írjuk fel trigonometrikus és exponenciális alakban a következő komplex számokat:**
   - **a)** z=-3i
   - **b)** z=1
   - **c)** z=-i
   - **d)** z=2+i
   - **e)** $z=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}i$

4. **Adjuk meg algebrai alakban a következő komplex számokat:**
   - **a)** $z=\frac{1}{2}(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$
   - **b)** $z=\sqrt{3}(\cos 120° + i \sin 120°)$

5. **Adottak $z_1=-\sqrt{3}+2i, z_2=1-i, z_3=-1+i$ komplex számok. Számítsuk ki az alábbiakat:**
   - **a)** $|z_1|=?, |z_2|=?, |z_3|=?$
   - **b)** $\operatorname{arc}(z_2)$ (argumentum)
   - **c)** $\operatorname{Re}(z_1)$
   - **d)** $\operatorname{Im}(z_2)$
   - **e)** z_1+z_2
   - **f)** $z_1\overline{z_2}$
   - **g)** $z_1 z_3$
   - **h)** $z_1+\overline{z_3}$
   - **i)** $z_1\overline{z_1}$

6. **Végezzük el a műveleteket!**
   - **a)** $\left(\overline{2-i}\right)^4$
   - **b)** $\left(1+\sqrt{3}i\right)^7$
   - **c)** $\overline{\left(\frac{3-i}{2+2i}\right)}$

d) $\overline{(1-2i)(3+i)}$

e) $(1+i)^7$

7. **Végezzük el a számolást trigonometrikus alakban, és írjuk fel a végeredményt algebrai alakban is!**

a) $2(\cos 15° + i\sin 15°) \cdot 4(\cos 105° + i\sin 105°)$

b) $\dfrac{4}{\cos 210° + i\sin 210°}$

c) $(2(\cos 40° + i\sin 40°))^9$

d) $3(\cos 60° + i\sin 60°) \cdot 4(\cos 120° + i\sin 120°)$

e) $[2(\cos 15° + i\sin 15°)]^4$

f) $\dfrac{\cos 110° + i\sin 110°}{2(\cos 65° + i\sin 65°)}$

8. **Számítsuk ki a következő kifejezések értékét és az eredményt adja meg algebrai alakban!**

a) $\dfrac{z_1^8}{z_2^4} \cdot 32 - \overline{z_2}^{\,2} = ?$ ha $z_1 = 2(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4})$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

9. **Adja meg az alábbi komplex számok értékét:**

a) $\begin{cases} z_1 = 3 - 3i \\ z_2 = \sqrt{2}\left(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ\right) \end{cases}$ → $\left(2 + \dfrac{\overline{z_1} - \overline{z_2}}{z_1 + z_2}\right)^4 = ?$

b) $\begin{cases} z_1 = 8 \cdot \left(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ\right) \\ z_2 = \sqrt{2}\left(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ\right) \\ z_3 = 1 + \sqrt{3}i \end{cases}$ → $\dfrac{\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}}{z_3^3} + i^{413} = ?$

c)

$\begin{cases} z_1 = 8 \cdot \left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right) \\ z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) \\ z_3 = 1 - \sqrt{3}i \end{cases}$ → $\left(\dfrac{5i}{2+i} - \dfrac{\overline{z_1} \cdot z_2}{z_3^3}\right)^{375} = ?$

d) $\begin{cases} z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \\ z_2 = -1+i \end{cases} \rightarrow \frac{(6-\sqrt{12}i)^3}{z_2^{\ 8}} + \frac{\overline{z_1}}{i^{101}} = ?$

e) $\begin{cases} z_1 = 4-3i \\ z_2 = \sqrt{8}(\cos 45^\circ + i\cdot\sin 45^\circ) \end{cases} \rightarrow \frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{z_1 - z_2} = ?$

f) $\begin{cases} z_1 = \cos 35^\circ + i\cdot\sin 35^\circ \\ z_2 = 1+\sqrt{3}\cdot i \end{cases} \rightarrow \frac{z_1^3\cdot z_2^5}{\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}} = ?$

g) $\begin{cases} z_1 = -\sqrt{3}+i \\ z_2 = \sqrt{2}(\cos 75^\circ + i\cdot\sin 75^\circ) \end{cases} \rightarrow z_1^3\cdot z_2^6 + \frac{\overline{z_1}}{z_2} = ?$

h) $\frac{1-2i}{2+i}\cdot 5\cdot i^{173} = ?$

i) $\begin{cases} z_1 = -\sqrt{12}+2i \\ z_2 = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ) \end{cases} \rightarrow \frac{z_2^{12}}{z_1^3} + \frac{\overline{z_2}}{i^{677}} = ?$

j)

$\begin{cases} z_1 = 8\cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \\ z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ z_3 = 1+\sqrt{3}i \end{cases} \rightarrow \left(\frac{10i}{4+2i} - \frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_3^3}\right)^{413} = ?$

k) $\begin{cases} z_1 = -6+10i \\ z_2 = \sqrt{2}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ) \end{cases} \rightarrow \frac{\left(\overline{z_1}+z_2^8\right)^4}{i^{563}} = ?$

l) $\begin{cases} z_1 = 3-8i \\ z_2 = \sqrt{2}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ) \end{cases} \rightarrow \frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{z_2^2}\cdot i^{63} = ?$

m) $\begin{cases} z_1 = -\sqrt{12}+2i \\ z_2 = 2(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ) \end{cases} \rightarrow \frac{z_2^8}{z_2^3 + \overline{z_1}^{\,4}} = ?$

n) $\begin{cases} z_1 = \cos 35^\circ + i \cdot \sin 35^\circ \\ z_2 = 1 + \sqrt{3} \cdot i \end{cases}$ → $\dfrac{\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}}{i^{222} \cdot z_1^3 \cdot z_2^5} = ?$

o) $\begin{cases} z_1 = \sqrt{3} + 3i \\ z_2 = 2(\cos 330^\circ + i \cdot \sin 330^\circ) \end{cases}$ → $\dfrac{z_1^8}{i^9 \cdot z_2^2} + \overline{z_2} = ?$

p) $\begin{cases} z_1 = \sqrt{3}(\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ) \\ z_2 = 3 + \sqrt{3}i \end{cases}$ → $\dfrac{i^{11} \cdot z_1}{z_2^6} - \dfrac{\overline{z_2}}{z_1^2} = ?$

10. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

a) $z^2 + z + 1 = 0$

b) $9z^3 + \dfrac{1}{3} = 0$

c) $16z^2 + 1 = 0$

11. Számolja ki az alábbi komplex számok megfelelő gyökeit! Adja meg a gyökök algebrai alakját, és ábrázolja őket a komplex számsíkon!

a) $z = -3 - \sqrt{27}i \qquad \sqrt[4]{z} = ?$

b) $\sqrt[3]{-27} = ?$

c) $\sqrt[3]{8} = ?$

d) $z = 1 - \sqrt{3}i \quad \sqrt[2]{z} = ?$

e) $z = -4 - 4i \quad \sqrt[5]{z} = ?$

f) $\sqrt[3]{-8i} = ?$

g) $z = -3 + \sqrt{27} \cdot i \qquad \sqrt[4]{z} = ?$

h) $z = -8 + 8\sqrt{3} \cdot i \qquad \sqrt[4]{z} = ?$

i) $z = -8 - 8\sqrt{3} \cdot i \qquad \sqrt[4]{z} = ?$

j) $\sqrt[4]{16i} = ?$

k) $\sqrt[5]{1} = ?$

l) $\sqrt[6]{1} = ?$

12. Oldja meg az alábbi másodfokú egyenleteket a komplex számok halmazán!

a) $x^2 + 2ix - 1 - 2i = 0$

b) $x^2 - 2ix - 1 - 8i = 0$

c) $x^2 + 6x + 25 = 0$

d) $x^2 + 8ix - 15 = 0$

e) $x^2 + x + 1 = 0$

f) $x^2 + 2ix + 8 = 0$

g) $x^2 - 4ix - 4 - 8i = 0$

h) $x^2 + 4ix - 4 - 2i = 0$

i) $4x^2 + 4ix + 1 + 3i = 0$

j) $x^2 - ix - 1 = 0$

k) $2x^2 + 4x + 2 + i = 0$

13. Oldja meg a $z^2 + (2i - 3)z - 1 - 3i = 0$ komplex egyenletet! Határozza meg a fenti egyenlet legkisebb képzetes résszel rendelkező gyökének harmadik gyökeit is!

14. Oldja meg a $z^2 + (2i - 3)z - 3 - i = 0$ komplex egyenletet! Határozza meg a fenti egyenlet legkisebb abszolút értékű gyökének harmadik gyökeit is!

15. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

a) $(1 + i)z^6 = 1 - i$

b) $(1 - i\sqrt{3})z^5 = 1 + i\sqrt{3}$

c) $x^8 + ix^4 - 1 = 0$

d) $x^8 + 4x^4 + 3 = 0$

e) $x^6 - ix^3 + \frac{3}{4} = 0$

f) $x^6 + 3 = -2ix^3$

g) $ix^6 + 2x^3 + 3i = 0$

h) $z + 2\bar{z} = |z| - 2i$

i) $2z + \bar{z} = |z| + i$

j) $3z - |z| = \bar{z} + 4\sqrt{3}i$

k) $z \cdot \bar{z} - 3(z - \bar{z}) = 2 + 3i$

Megoldások:

Megoldások ellenőrzéséhez javaslom a MATLAB programot vagy a neten is elérhető MATHEMATICA-t : http://www.wolframalpha.com