Komplex euklideszi terek

1. Adott két komplex vektor: $\underline{u} = \begin{pmatrix} 2+4i \\ 2-i \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2i \\ 4+4i \end{pmatrix}$

a, Merőleges-e a két vektor egymásra?

b, Adja meg $\|\underline{u}\|$ és $\|\underline{v}\|$ értékét!

M.o.:

a, $\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0$

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \overline{\underline{v}}^{T} \cdot \underline{u} = (-2i \quad 4-4i) \cdot \begin{pmatrix} 2+4i \\ 2-i \end{pmatrix} = (-2i)(2+4i) + (2-i)(4-4i) =$$

$$-4i - 8i^2 + 8 - 4i - 8i + 4i^2 = 12 - 16i \neq 0$$

<u>Vagyis nem merőlegesek!</u> (VIGYÁZAT: Az egyik vektor koordinátáit konjugálni kell!!)

<u>b, </u>(VIGYÁZAT: Itt is kell konjugálni az egyik vektort!!)

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\overline{\underline{v}}^{T} \cdot \underline{v}} = \sqrt{(-2i \quad 4-4i) \begin{pmatrix} 2i \\ 4+4i \end{pmatrix}} = \sqrt{(-2i)(2i) + (4-4i)(4+4i)} =$$

$$= \sqrt{-4i^2 + 16 - 16i^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$$

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle} = \sqrt{\underline{u}^{T} \cdot \underline{u}} = \sqrt{(2-4i)(2+4i) + (2+i)(2-i)} = \sqrt{4+16+4+1} = \sqrt{25} = 5$$

2. a, Milyen a és b értékek esetén lesznek az alábbi komplex vektorok merőlegesek egymásra?

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 4-i \\ 2+2i \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} a+bi \\ 2-8i \end{pmatrix}$$

b, A pontos értékek kiszámolásával igazold a fent megadott $\underline{x}, \underline{y}$ vektorokra a $\|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 = (d(x,y))^2$ egyenlőséget!

c, A megadott ortogonális vektorokat normálva adjon meg ortonormált vektorokat!

M.o.:

a, $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \overline{\underline{y}}^{T} \cdot \underline{x} = (4+i)(a+bi) + (2-2i)(2-8i) = 4a + ai + 4bi - b + 4 - 4i - 16i - 16 =$

$= (4a - b - 12) + (a + 4b - 20)i = 0$

Ebből: $\begin{matrix} 4a - b - 12 = 0 \\ a + 4b - 20 = 0 \end{matrix}$ Vagyis a keresett értékek: $a = 4, b = 4 \rightarrow \underline{y} = \begin{pmatrix} 4+4i \\ 2-8i \end{pmatrix}$

b, $\|\underline{x}\| = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} = 5$ és $\|\underline{y}\| = \sqrt{\langle \underline{y}, \underline{y} \rangle} = 10$

$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$ ezért szükség van a következőre: $\underline{x} - \underline{y} = \begin{pmatrix} 4-i \\ 2+2i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+4i \\ 2-8i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5i \\ 10i \end{pmatrix}$

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\| = \left\| \begin{pmatrix} -5i \\ 10i \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(5i)(-5i) + (-10i(10i))} = \sqrt{25+100} = \sqrt{125}$$

Tehát $\|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 = (d(x,y))^2$ teljesül, mert $5^2 + 10^2 = (\sqrt{125})^2$

c, Normálni a vektorokat komplexben ugyanúgy lehet mint valósban:

$$\underline{e}_x = \frac{\underline{x}}{\|x\|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4-i \\ 2+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \frac{1}{5}i \\ \frac{2}{5} + \frac{2}{5}i \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_y = \frac{\underline{y}}{\|y\|} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4+4i \\ 2-8i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} + \frac{4}{10}i \\ \frac{2}{10} - \frac{8}{10}i \end{pmatrix}$$

3. Döntse el, hogy az alábbi a és b vektorok merőlegesek-e egymásra! Számítsa ki mindkét vektor hosszát!

a, $a = \begin{bmatrix} 1-2i \\ 3i \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2+2i \\ 5-i \end{bmatrix}$

b, $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 3-2i \\ 5i \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} -2+i \\ 3 \\ 1-4i \end{pmatrix}$

4. a,Határozza meg az a és b paraméter értékét úgy, hogy a vektorok merőlegesek legyenek!

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2+i \\ -i \\ -1-2i \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4+i \\ a+bi \end{pmatrix}$$

b, A pontos értékek kiszámolásával igazold a fent megadott $\underline{x}, \underline{y}$ vektorokra a $\|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 = (d(x,y))^2$ egyenlőséget!

c, A megadott ortogonális vektorokat normálva adjon meg ortonormált vektorokat!

5. Adja meg az alábbi vektorok skalárszorzatát, távolságát, és mindkét vektor normáját!

a, $\underline{u} = \begin{pmatrix} 4i \\ i \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} -1+i \\ 3+7i \end{pmatrix}$

b, $\underline{u} = \begin{pmatrix} 5-i \\ 13 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} -2+4i \\ 42i \end{pmatrix}$

c, $\underline{a} = \begin{pmatrix} -5i \\ 1+2i \\ 1+2i \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} i \\ -3-2i \\ 1-i \end{pmatrix}$

d, $\underline{a} = \begin{pmatrix} -i \\ 16 \\ -7+8i \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 2+13i \\ -7 \\ 3-i \end{pmatrix}$

e, $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3+i \\ 2i \\ 2-i \\ -1-i \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 10-5i \\ -3-3i \\ 6 \\ 2+8i \end{pmatrix}$

f, $\underline{a} = \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ 3i \\ -i \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 3i \\ -4+i \\ -1-2i \end{pmatrix}$