Mátrix inverze

1. Példa 2x2-es mátrix inverzére: A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Megoldás1: Gauss algoritmus segítségével:

$$[A|E]=\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2 \end{array}\right] = [E|A^{-1}]$$

Megoldás2: Az $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ képlet alapján, ahol $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1\cdot 4 - 2\cdot 3} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

2. Példa 3x3-as mátrixok inverzére:A=$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 15 \\ 4 & -3 & 18 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Megoldás:

$$[A|E]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -3 & 15 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 18 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 5 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/3 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 5 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5/3 & -1 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5/3 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8/3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2/9 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 5/9 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right] = [E|A^{-1}]$$

3. Milyen p paraméter esetén invertálható az alábbi mátrix?P=$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & p & 0 \\ 3 & -5 & p-2 \end{bmatrix}$

Megoldás: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & p & 0 \\ 3 & -5 & p-2 \end{vmatrix} = p(p-2) - (-2)(3(p-2)+5) + 3(-p) = p^2 - p - 2$

3x3-as mátrix invertálható pontosan akkor, ha a determinánsa nem 0, vagyis ha $p \neq 2, p \neq -1$

4. Milyen p paraméter esetén invertálhatóak? Q=$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ p & 1 & 3 \end{bmatrix}$, R=$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -p \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

1. Adja meg az alábbi mátrixok inverzét, és mátrixszorzás segítségével ellenőrizze is, hogy jó eredményt kapott!

a, $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

b, $A=\begin{bmatrix} 3 & -3 & 15 \\ 4 & -3 & 18 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 8 & -2 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & 4 \\ 7 & 3 & -1 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 6 & -5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c, $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 8 & 10 \\ 5 & -2 & 8 & -12 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

Determináns

2. 2×2-es mátrixok determinánsa: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = ?$

Megoldás: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2$ (A $\det A = ad - bc$ képlet alapján, ahol $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$)

b, Add meg a determinánsok értékét: $\begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 0 & -7 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ -16 & -4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 11 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2000 & 6000 \\ -5000 & -4000 \end{vmatrix}$

3. a, 3×3-as mátrixok determinánsa: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = ?$

Megoldás: Például a $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ képlettel

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot(-93) - 2\cdot 78 - 3\cdot 67 = -450$$

Ez az első sor szerinti kifejtés, de tetszőleges sor vagy oszlop szerint is kifejthető!

b, Adja meg az alábbi determinánsok értékét:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -4 & 3 & -8 \\ 1 & 8 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

4. 4×4-es mátrixok determinánsa: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = ?$

Megoldás például: $\det A = a_{11} \cdot \det A_{11} - a_{12} \cdot \det A_{12} + a_{13} \cdot \det A_{13} - a_{14} \cdot \det A_{14}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (1 \cdot (-12) - 4 \cdot 14 - 3 \cdot 4) + 2 \cdot (0 - 4 \cdot 33 - 3 \cdot 6) + 3 \cdot (0 - 1 \cdot 33 - 3 \cdot 4) - 0 = -80 - 300 - 135 = -515$$

Természetesen a kifejtést egyszerűsíthetjük a GAUSS algoritmus és a determinánsra vonatkozó tételek alapján!!

GAUSS hatása a determinánsra:

- Sorcsere (vagy oszlopcsere) esetén a determináns értéke (-1)-szeresére változik.
- Ha egy sort (vagy oszlopot) megszorzunk egy $\lambda \neq 0$ számmal, akkor a determináns értéke is λ-szorosára változik.
- Ha egy sorhoz (oszlophoz) hozzáadjuk egy másik sor (oszlop) valahányszorosát, akkor a determináns értéke nem változik.

5. Egy lineáris egyenletrendszer együttható mátrixán elvégeztük a Gauss algoritmust:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -16 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}$$

Ez alapján döntse el, hogy igaz-e az alábbi állítás, válaszát indokolja!

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-13)$$

Megoldás:
Az utolsó lépésben kapott felső háromszög mátrix determinánsa valóban $1\cdot 2\cdot(-13)$, de ez nem egyezik meg az eredeti mátrix determinánsával, mert kétszer is végeztünk olyan műveletet, ami megváltoztatta a determináns értékét:

- 1. Lépésben sor csere →det értéke (-1)-szeresére változik
- 3. Lépésnél megszoroztuk a harmadik sort kettővel →det értéke is kétszeresére nőtt

Vagyis az eredeti mátrix determinánsa: $(-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\ 1\cdot 2\cdot(-13)\ \right]$

6. Adja meg az alábbi mátrixok determinánsát!

a,A= $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$, B= $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$, C= $\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

b,A= $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 15 \\ 4 & -3 & 18 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$,B= $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, C= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 8 & -2 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & 4 \\ 7 & 3 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c, A= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 8 & 10 \\ 5 & -2 & 8 & -12 \end{bmatrix}$, B= $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$