Gauss elimináció

1. a.) Írja fel az egyenleteket a mátrixos alakból.

b.) Gauss elimináció segítségével határozza meg az egyenletek gyökeit a mátrixos alakban felírt egyenleteknek.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 5 & -2 & 7 & 25 \\ 15 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

Megoldások:

a.)
$$\begin{aligned} x + 2y &= -5 \\ 5x - 2y + 7z &= 25 \\ 15x + 6y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

b.)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 5 & -2 & 7 & 25 \\ 15 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right] \text{II-5*I} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & -12 & 7 & 50 \\ 15 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right] \text{III-15*I}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & -12 & 7 & 50 \\ 0 & -24 & 3 & 78 \end{array}\right] \text{III-2*II} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & -12 & 7 & 50 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{array}\right] \text{III/-11}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & -12 & 7 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \text{II-7*III} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & -12 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \text{II/-12}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \text{I-2*II} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

⇨ Tehát x=1, y=-3, z=2

2. Írja fel az alábbi egyenletrendszert mátrixos alakban, és oldja meg Gauss-Jordan eliminációval!

2x + 3y + z + 5v = 11
x + 2y + 2z + 3v = 8
x + y –z + 2v = 4
4x – y – z + z = 3

Megoldás:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 11 \end{array}\right)$$ II - I ; III – 4*I ; IV – 2*I

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -12 \\ 0 & -9 & -9 & -11 & -29 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -5 \end{array}\right)$$ II*(-1)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 12 \\ 0 & -9 & -9 & -11 & -29 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -5 \end{array}\right)$$ III + 9*II ; IV + II

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 18 & -2 & 79 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

A negyedik sorban egy tiltott sor keletkezett, tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása. (A megoldásban a Gauss algoritmus látható, ahol csak a vezérelemek alatti értékeket nullázzuk, de teljesen hasonlóan lehetett volna felettük is nullázni)

2 Írja fel az egyenletrendszert mátrixos alakban és oldja meg Gauss-Jordan eliminációval!

x + 2y + 3z + 4v = 13
x + 3y + 2z – 2v = -3
3x + y + 4z + 3v = 12
3x + 2y + 3z – 3v = -4

Megoldás:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 13 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 12 \\ 3 & 2 & 3 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

II – I ; III – 3*I ; IV – 3*I

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & -16 \\ 0 & -5 & -5 & -9 & -27 \\ 0 & -4 & -6 & -15 & -43 \end{array}\right)$$

III + 5*II ; IV + 4*II

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & -16 \\ 0 & 0 & -10 & -39 & -107 \\ 0 & 0 & -10 & -39 & -107 \end{array}\right)$$

IV – III

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & -16 \\ 0 & 0 & -10 & -39 & -107 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Látható, hogy az egyik változóhoz nem tartozik vezérelem. Ez szabad változó lesz, szabadon választható az értéke., ezért végtelen megoldása lesz az egyenletrendszernek. A Gauss Jordan algoritmus befejezése után, a megoldás:

$z = \frac{107-39v}{10}$

y = z + 6v – 16

x = 13 – 2y – 3z – 4v

$v \in R$ (szabad változó)

4. Határozza meg az a és b valós paraméterek értékét úgy, hogy az alábbi egyenletrendszernek

a, egyetlen megoldása legyen

b, ne legyen megoldása

c. végtelen sok megoldása legyen. A végtelen sok megoldást adja is meg!

$$\begin{aligned} x+2y+2z&=5 \\ 3x+7y+5z&=12 \\ x+3y+ax&=b+5 \end{aligned}$$

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 12 \\ 1 & 3 & a & b+5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & a-2 & b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a-1 & b+3 \end{bmatrix}$$

1. a ≠ 1 esetén a harmadik sor harmadik eleme kiválasztható vezérelemnek. Ekkor nincs tiltósor és minden oszlopban van vezérelem → Egyetlen megoldás van

2. a = 1 és b ≠ -3 esetén tiltósor van → Nincs megoldás

3. a = 1 és b = -3 esetén nincs tiltósor, és a harmadik oszlopban nincs vezérelem → Végtelen sok megoldás van

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x+4z&=11 \\ y-z&=-3 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} x&=11-4z \\ y&=-3+z \\ z&\in R \end{aligned}$$

5. Gyakorlófeladatok

a,

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 2 \\ 7x + 6y + 5z &= 2 \\ 5x + 4y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

b,

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ -3x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 9x_4 &= 2 \\ -2x_1 + 6x_3 + 5x_4 &= 1 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 + 4x_4 &= 2 \end{aligned}$$

c,

$16 x_2 + 5 x_3 - 7 x_4 = 1$

$3 x_1 + x_2 - 2 x_3 + x_4 = 24$

$-2 x_1 - 6 x_2 + 3 x_3 + 3 x_4 = -19$

$x_1 + 3 x_2 - x_4 = 8$

$x_1 - 5 x_2 - 2 x_3 + 10 x_4 = 29$

d,

$-2x_1 - x_2 - 4x_3 + 8x_4 = 6$

$6x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 6x_4 = -2$

$4x_1 + 10x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8$

$-6x_1 + 3x_2 + 12x_3 - 24x_4 = -18$

e, Adja meg, hogy az alábbi paraméteres lineáris egyenletrendszernek, a paraméter értékétől függően mikor van nulla, mikor egy, és mikor végtelen sok megoldása! Oldja meg az egyenletrendszert ha a paraméter értéke: $a = 11$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 5x_1 - 6x_2 + 14x_3 &= 27 \\ x_1 - 3x_2 + ax_3 &= 15 \end{aligned}$$

f, Adja meg, hogy az alábbi paraméteres lineáris egyenletrendszernek, a paraméter értékétől függően mikor van nulla, mikor egy, és mikor végtelen sok megoldása! Oldja meg az egyenletrendszert ha a paraméter értéke: $a = -8, b = 1$

$$\begin{aligned} 1x_1 + 3x + 1x_3 &= b \\ 2x_1 + 8x_2 + 5x_3 &= 2b - 1 \\ -4x_1 - 14x_2 + ax_3 &= 0 \end{aligned}$$

1. Adja meg az alábbi lineáris egyenletrendszer összes megoldását:

$$x - 2y + z - 3u = -10$$
$$x - y + 3z = -5$$
$$-3x + 10y + 8z + 23u = 50$$

Megoldás:

$$x = -\frac{1}{2}z$$
$$y = 5 + \frac{5}{2}z$$
$$z \in R$$
$$u = -\frac{3}{2}z$$

2. Adja meg, hogy az „p" paraméter értékétől függően hány megoldása van az alábbi lineáris egyenletrendszernek:

$$-2x + 2y + pz = 3$$
$$3x - 4y = -2$$
$$-x + 2y + z = 4$$

Megoldás:

$p = -1$ esetén nincs megoldás.

$p \neq -1$ esetén egy megoldás.

1. Adja meg az alábbi lineáris egyenletrendszer összes megoldását:

$$-2x + 4y + 2z + 3u = 5$$
$$-x - 2y + 3z + 2u = 2$$
$$3x - 4y - 4z - 5u = -7$$

Megoldás:

$$x = 2z - 4$$
$$y = \frac{1}{2}z$$
$$z \in R$$
$$u = -1$$

2. Adja meg, hogy a „**p**” paraméter értékétől függően hány megoldása van az alábbi lineáris egyenletrendszernek:

$$6x_1 + 2x_2 + px_3 = 2$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = -3$$
$$-2x_1 + 8x_3 = 5$$

Megoldás:

$p = -21$esetén nincs megoldás.

$p \neq -21$ esetén egy megoldás.