Függetlenség, Generátor rendszer, Bázis

1 Hány független vektor választható ki maximálisan az alábbi vektorok közül:

$$\underline{a}=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix},\underline{b}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\6\end{pmatrix},\underline{c}=\begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix},\underline{d}=\begin{pmatrix}21\\19\\-27\end{pmatrix},\underline{e}=\begin{pmatrix}-12\\-10\\23\end{pmatrix}$$

- Oldja meg az $x\cdot\underline{a}+y\cdot\underline{b}+z\cdot\underline{c}=\underline{e}$ egyenletrendszert!
- Oldja meg az $x\cdot\underline{a}+y\cdot\underline{b}+z\cdot\underline{c}=\underline{d}$ egyenletrendszert!
- Generátorrendszerét alkotják-e a megadott vektorok R^3-nak
- Kiválasztható-e a vektorok közül R^3 egy bázisa?

Megoldás:

$$\begin{bmatrix}3&-3&0&21&-12\\3&-2&2&19&-10\\-3&6&6&-27&23\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&7&-4\\0&1&2&-2&2\\0&3&6&-6&11\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&7&-4\\0&1&2&-2&2\\0&0&0&0&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&5&-2\\0&1&2&-2&2\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}1&0&2&5&0\\0&1&2&-2&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$ Három független vektor: $\underline{a}=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix},\underline{b}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\6\end{pmatrix},\underline{e}=\begin{pmatrix}-12\\-10\\23\end{pmatrix}$

- Az $x\cdot\underline{a}+y\cdot\underline{b}+z\cdot\underline{c}=\underline{e}$ egyenletrendszernek nem létezik megoldása!
- Az $x\cdot\underline{a}+y\cdot\underline{b}+z\cdot\underline{c}=\underline{d}$ egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van:

$x=5-2z$

$y=-2-2z$ Például: $5\underline{a}-2\underline{b}=\underline{d}$

$z\in R$

- Generátorrendszerét alkotják a vektorok R^3-nak!
- Igen, R^3-nak egy bázisa: $\underline{a}=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix},\underline{b}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\6\end{pmatrix},\underline{e}=\begin{pmatrix}-12\\-10\\23\end{pmatrix}$

2. $\underline{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-5\end{pmatrix},\underline{b}=\begin{pmatrix}-3\\5\\21\end{pmatrix},\underline{c}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix},\underline{d}=\begin{pmatrix}7\\-6\\-35\end{pmatrix}$

a, Generátorrendszert alkotnak-e a fenti vektorok?
b, Bázist alkotnak-e a fenti vektorok?
c, Generátorrendszert alkotnak-e az $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ vektorok?

d, Bázist alkotnak-e az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok?

e, Generátorrendszert alkotnak-e a $\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok?

f, Bázist alkotnak-e a $\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok?

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 7 \\ -1 & 5 & 3 & -6 \\ -5 & 21 & 5 & -35 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 15 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 19/2 & 0 \\ 0 & 1 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2/19 & 0 & 1 & 0 \\ -5/19 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a, Igen b, Nem c, Nem d, Nem e, Igenf, Igen

3. Állítsd elő a nullvektort az alábbi vektorok lineáris kombinációjaként:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{d} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 47 \\ -23 \end{pmatrix}$$

- Lineárisan függetlenek-e a vektorok?
- Generátorrendszert alkotnak-e a vektorok R^4 -ben?
- Bázist alkotnak-e?

4. Bázist alkotnak-e a következő vektorok R^4 -ben? $\underline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Lineárisan függetlenek-e az, $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok?
- Állítsd elő az $\underline{e} = (-1 \quad 4 \quad 0 \quad -5)$ vektort $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok lineáris kombinációjaként!

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & 3 & -5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & -1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6/5 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & -1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 6/5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát az $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$ vektorok bázist alkotnak R^4-ben, így persze lin. függetlenek is, és fennáll:
$\underline{e}=2\underline{a}-\underline{c}$

5. Add meg az összes megoldását az alábbi egyenletnek:

$$x\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-7\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}-4\\-1\\-1\\-3\end{pmatrix}+z\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\6\\32\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\3\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

- Hány lineárisan független választható ki az egyenlet bal oldalán lévő vektorokból?
- Előállítható-e a $\begin{pmatrix}3 & 0 & 3 & 15\end{pmatrix}$ vektor a többi lineáris kombinációjaként? Ha igen, hogyan?

Megoldás:

$$\begin{bmatrix}2&-4&3&3\\1&-1&-1&0\\-1&-1&6&3\\-7&-3&32&15\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1&0\\2&-4&3&3\\-1&-1&6&3\\-7&-3&32&15\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1&0\\0&-2&5&3\\0&-2&5&3\\0&-10&25&15\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1&0\\0&-2&5&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-7/2&-3/2\\0&1&-5/2&-3/2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Vagyis az összes megoldás:
$$x=7/2\,z+3/2\,u$$
$$y=5/2\,z+3/2\,u$$
$$z,u\in R$$

- Két független vektort tudunk kiválasztani, Pl: $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-7\end{pmatrix}$ *és* $\begin{pmatrix}-4\\-1\\-1\\-3\end{pmatrix}$

- Ha a $\begin{pmatrix}3\\0\\3\\15\end{pmatrix}$ vektort szeretnénk előállítani akkor az u ismeretlen egyszerűen (-1)-nek kell

választani, ekkor lesz az egyenlet a következő alakú: $x\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-7\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}-4\\-1\\-1\\-3\end{pmatrix}+z\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\6\\32\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\3\\15\end{pmatrix}$

Vagyis a megoldások:
$$x=7/2\,z-3/2$$
$$y=5/2\,z-3/2$$
$$z\in R$$

Egy konkrét példa z = 0 esetén: $\begin{array}{l} x = -3/2 \\ y = -3/2 \\ z = 0 \end{array}$ azaz: $-3/2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} - 3/2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix}$

6. Hány független vektor választható ki a megadott vektorok közül?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Válassza ki az alábbi vektorok közül R^3 egy bázisát
- Állítsa elő a bázisvektorok lineáris kombinációjaként a nem-bázisvektorokat!

7. $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 21 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -35 \end{pmatrix}$

a, Generátorrendszert alkotnak-e a fenti vektorok?
b, Bázist alkotnak-e a fenti vektorok?
c, Generátorrendszert alkotnak-e az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok?
d, Bázist alkotnak-e az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok?
e, Generátorrendszert alkotnak-e a $\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok?
f, Bázist alkotnak-e a $\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok?
g, Előállítható-e , és ha igen, akkor hogyan, a $\underline{c}$ vektor az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}$ lineáris kombinációjaként?

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 7 \\ -1 & 5 & 3 & -6 \\ -5 & 21 & 5 & -35 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 15 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 19/2 & 0 \\ 0 & 1 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2/19 & 0 & 1 & 0 \\ -5/19 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a, Igen b, Nem
c, Nem d, Nem
e, Igen f, Igen
g, $\underline{c} = 19/2\,\underline{a} + 5/2\,\underline{b} + 0\underline{d}$

Determináns segítségével megoldható feladatok:

8. Milyen paraméter esetén lesznek a vektorok lin. összefüggőek? $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ a \end{pmatrix}$

Megoldás: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 3 \\ 10 & 7 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & a \end{vmatrix} = 2(-2a-21) - 1(-6a-30) = 2a - 12$

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok pontosan akkor összefüggőek, ha a vegyes szorzatuk,vagyis a belőlük alkotott 3×3-as mátrix determinánsa 0, vagyis, ha a=6.

9. Lineárisan függetlenek-e? $\underline{a} = (-2 \quad -4 \quad -1)$, $\underline{b} = (3 \quad 5 \quad 1)$, és $\underline{c} = (-3 \quad -2 \quad 4)$

Megoldás: $\begin{vmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2(20+2) - (-4)(12+3)$ +(-1)(-6+15)=7 => függetlenek

10. Milyen paraméter esetén alkotnak generátorrendszert? $\underline{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} a^2-2 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix}$

Megoldás: 3 darab R^3-beli vektor gen. rsz. pontosan akkor, ha független, vagyis ha $\det A \neq 0$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a \\ a^2-2 & 1 & a-1 \end{vmatrix} = a^3 + a^2 - 2a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0, a \neq 1, a \neq -2$$

11. Bázist alkotnak-e R^4-ben az megadott vektorok? $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{d} = \begin{pmatrix} 22 \\ 5 \\ -65 \\ 0 \end{pmatrix}$

Megoldás: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ -3 & 2 & 5 & -65 \\ -2 & 6 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$ Tehát nem alkotnak bázist!